49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Chorshanba, 16 iyul , 2008

1-masala. Ot'kir burchakli ABC uchburchakning balandliklari kesishishi nuqtasi H bo'lsin. Markazi BC tomonning o'rtasida bo'lgan va H nuqtadan o'tadigan aylana BC to'g'ri chiziqni A_1 va A_2 nuqtalarda kesadi. Huddi shunday, markazi CA tomonning o'rtasida bo'lgan va H nuqtadan o'tadigan aylana CA to'g'ri chiziqni B_1 va B_2 nuqtalarda kesadi, hamda markazi AB tomonning o'rtasida bo'lgan va H nuqtadan o'tadigan aylana AB to'g'ri chiziqni C_1 va C_2 nuqtalarda kesadi. A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 nuqtalar bir aylanada yotishini isbotlang.

2-masala. (a) Har biri 1 dan farqli bo'lgan va $xyz = 1$ shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy x,y,z sonlar uchun

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

tengsizlikni isbotlang.

(b) Yuqoridagi tengsizlik har biri 1 dan farqli bo'lgan va $xyz = 1$ shartni qanoatlantiruvchi ratsional x,y,z sonlarning cheksiz ko'p uchliklari uchun tenglikka aylanishini isbotlang.

3-masala. Shunday natural n sonlarining cheksiz ko'pligini isbotlang-ki, $n^2 + 1$ sonining $2n+\sqrt{2n}$ sonidan katta bo'lgan tub bo'luvchisi mavjud.

Ajratilgan vaqt: 4 soat 30 minut
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Payshanba, 17 iyul , 2008

4-masala. $wx = yz$ shartni qanoatlantiruvchi barcha musbat haqiqiy w, x, y, z sonlar uchun

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $f : (0,\infty) \to (0, \infty)$ funksiyalar (ya'ni, barcha musbat sonlar to'plamida aniqlangan va musbat qiymatlarni qabul qiluvchi funksiyalar) topilsin.

5-masala. Natural n va k sonlar berilgan bo'lsin, bunda $k \geq n$ va $k - n$ ayirma juft son. 1, 2, … , $2n$ sonlar yordamida raqamlangan ($2n$)–ta lampalardan har biri quyidagi ikkita holatda bo'lishi mumkin: *on* (yonayapti) yoki *off* (yonmayapti). Eng boshida barcha lampalar yonmayapti. Quyidagi *qadamlar* ketma-ketliklari qaralmoqda: har bir qadamda aynan bitta lampaning holati qarama-qarshi holatga o'zgaradi (yani on off ga, yoki off on ga).

N orqali "1 –chi lampadan boshlab n –chi lampagacha barcha lampalar yonayapti, (n + 1) – chi lampadan boshlab ($2n$) –chi lampagacha esa barcha lampalar yonmayapti" umumiy holatga olib keladigan k ta qadamdan iborat bo'lgan ketma-ketliklar sonini belgilaymiz.

M orqali "1–chi lampadan boshlab n –chi lampagacha barcha lampalar yonayapti, (n + 1) – nchi lampadan boshlab ($2n$) –nchi lampagacha hech qaysi lampa o'zining holatini o'zgartirmagan" umumiy holatga olib keladigan k ta qadamdan iborat bo'lgan ketma-ketliklar sonini belgilaymiz.

N/M nisbatning qiymatini toping.

6-masala. Qavariq $ABCD$ to'rtburchakda $|BA| \neq |BC|$. ABC va ADC uchburchaklarga ichki chizilgan aylanalarni mos ravishda ω_1 va ω_2 deb belgilaymiz. ω aylana BA kesmaning A dan boshlab davomiga urinadi, BC kesmaning C dan boshlab davomiga urinadi, hamda AD va CD to'g'ri chiziqlarga urinadi. ω_1 va ω_2 aylanalarning umumiy tashqi urinmalari ω aylanada kesishishini isbotlang .

Ajratilgan vaqt: 4 soat 30 minut
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi