

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Середа, 16 липня 2008 р.

Задача 1. Нехай H — точка перетину висот гострокутного трикутника ABC . Коло з центром у середині сторони BC проходить через точку H та перетинає пряму BC у точках A_1 та A_2 . Аналогічно, коло з центром у середині сторони CA проходить через точку H та перетинає пряму CA у точках B_1 та B_2 , коло з центром у середині сторони AB проходить через точку H та перетинає пряму AB у точках C_1 та C_2 . Доведіть, що точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежать на одному колі.

Задача 2. (а) Доведіть, що нерівність

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

виконується для усіх відмінних від 1 дійсних чисел x, y, z таких, що $xyz = 1$.

(b) Доведіть, що вказана нерівність обертається на рівність для нескінченної кількості трійок відмінних від 1 раціональних чисел x, y, z таких, що $xyz = 1$.

Задача 3. Доведіть, що існує нескінченно багато таких натуральних чисел n , що число $n^2 + 1$ має простий дільник, більший за $2n + \sqrt{2n}$.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Четвер, 17 липня 2008 р.

Задача 4. Знайдіть усі функції $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ (тобто функції, що визначені на множині усіх додатних дійсних чисел та приймають додатні значення) такі, що

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

для довільних додатних w, x, y, z , які задовольняють рівність $wx = yz$.

Задача 5. Нехай n та k — такі натуральні числа, що $k \geq n$, а число $k - n$ парне. Є $2n$ ламп, які занумеровані числами $1, 2, \dots, 2n$, кожна з яких може знаходитись у одному з двох станів: *увімк.* (увімкнена) або *вимк.* (вимкнена). Спочатку всі лампи були вимнені. Розглядаються впорядковані послідовності *кроків*: на кожному кроці рівно одна лампа змінює свій стан на протилежний (з увімк. на вимк. або з вимк. на увімк.).

Позначимо через N число таких послідовностей з k кроків, що приводять до стану: усі лампи з 1-ї по n -ту увімкнені, а усі лампи з $(n + 1)$ -ї по $(2n)$ -у вимкнені.

Позначимо через M число таких послідовностей з k кроків, що приводять до стану: усі лампи з 1-ї по n -ту увімкнені, усі лампи з $(n + 1)$ -ї по $(2n)$ -у вимкнені, але при цьому жодна з ламп з $(n + 1)$ -ї по $(2n)$ -у ні разу не змінювала свого стану.

Знайдіть значення відношення N/M .

Задача 6. Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, у якому $|BA| \neq |BC|$. Позначимо кола, що вписані в трикутники ABC та ADC , через ω_1 та ω_2 відповідно. Припустимо, що існує коло ω , яке дотикається до продовження відрізка BA за точку A , продовження відрізка BC за точку C , і також дотикається до прямих AD та CD . Доведіть, що спільні зовнішні дотичні до кіл ω_1 та ω_2 перетинаються на колі ω .