

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Сриједа, 16.07.2008.

Задатак 1. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC . Кружница чији је центар средиште дужи BC и која садржи H сијече праву BC у тачкама A_1 и A_2 . Аналогно, кружница чији је центар средиште дужи CA и која садржи H сијече праву CA у тачкама B_1 и B_2 , а кружница чији је центар средиште дужи AB и која садржи H сијече праву AB у тачкама C_1 и C_2 . Доказати да тачке $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ припадају једној кружници.

Задатак 2. (а) Доказати да је

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

за све реалне бројеве x, y, z , такве да ниједан од њих није једнак 1 и за које важи $xyz = 1$.

(б) Доказати да се једнакост достиже за бесконачно много тројки рационалних бројева x, y, z , таквих да ниједан од њих није једнак 1 и за које важи $xyz = 1$.

Задатак 3. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да $n^2 + 1$ има прост дјелилац већи од $2n + \sqrt{2n}$.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Четвртак, 17.07.2008.

Задатак 4. Одредити све функције $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (тј. f је функција која слика позитивне реалне бројеве у позитивне реалне бројеве) за које је

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

за све позитивне реалне бројеве w, x, y, z за које важи $wx = yz$.

Задатак 5. Нека су n и k природни бројеви за које је $k \geq n$ и $k - n$ паран број. Дато је $2n$ лампи, означених бројевима $1, 2, \dots, 2n$; свака од њих може бити у једном од следећа два стања: *укључена* или *искључена*. У почетку су све лампе искључене. Посматрајмо низове *корака*: у сваком од корака мијења се стање тачно једне лампе (укључена постаје искључена, а искључена укључена).

Нека је N број таквих низова од k корака, тако да се добије стање у коме су све лампе означене бројевима 1 до n укључене, а све лампе означене бројевима $n + 1$ до $2n$ искључене.

Нека је M број таквих низова од k корака, тако да се добије стање у коме су све лампе означене бројевима 1 до n укључене, а све лампе означене бројевима $n + 1$ до $2n$ искључене и притом ниједном није мијењано стање лампи означених бројевима $n + 1$ до $2n$.

Израчунати N/M .

Задатак 6. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао код кога је $|BA| \neq |BC|$. Нека су ω_1 и ω_2 уписане кружнице троуглова ABC и ADC , редом. Нека постоји кружница ω која додирује полуправу BA након тачке A и полуправу BC након тачке C , а која истовремено додирује и праве AD и CD . Доказати да се заједничке спољашње тангенте кружница ω_1 и ω_2 секу на ω .