

**49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD**  
**MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008**

---

*Trešdien, 2008. gada 16. jūlijā*

**1. uzdevums** Punkts  $H$  ir šaurleņķu trijstūra  $ABC$  augstumu krustpunkts. Riņķa līnija, kas iet caur punktu  $H$  un kuras centrs ir malas  $BC$  viduspunkts, krusto taisni  $BC$  punktā  $A_1$  un  $A_2$ . Līdzīgi riņķa līnija, kas iet caur punktu  $H$  un kuras centrs ir malas  $CA$  viduspunkts, krusto taisni  $CA$  punktā  $B_1$  un  $B_2$ , bet riņķa līnija, kas iet caur punktu  $H$  un kuras centrs ir malas  $AB$  viduspunkts, krusto taisni  $AB$  punktā  $C_1$  un  $C_2$ . Pierādiet, ka punkti  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  atrodas uz vienas riņķa līnijas.

**2. uzdevums** (a) Pierādiet, ka

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1,$$

ja  $x, y, z$  ir reāli skaitļi, kuri visi atšķiras no 1 un apmierina nosacījumu  $xyz = 1$ .

(b) Pierādiet, ka augšminētā nevienādība pārvēršas par vienādību bezgalīgi daudziem no vieninieka atšķirīgu racionālu skaitļu  $x, y, z$  trijniekiem, kuri apmierina nosacījumu  $xyz = 1$ .

**3. uzdevums** Pierādiet, ka bezgalīgi daudziem veseliem pozitīviem skaitļiem  $n$  skaitlis  $n^2 + 1$  dalās ar kādu pirmskaitli, kas ir lielāks nekā  $2n + \sqrt{2n}$ .

**49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD**  
**MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008**

*Ceturtdien, 2008. gada 17. jūlijā*

**4. uzdevums** Noskaidrojiet, kādām funkcijām  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  (tātad  $f$  ir funkcijas, kuras definētas visiem pozitīviem reāliem skaitļiem un pieņem tikai pozitīvas reālas vērtības) piemīt īpašība: ja pozitīvi reāli skaitļi  $w, x, y, z$  apmierina nosacījumu  $wx = yz$ , tad

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}.$$

**5. uzdevums** Doti veseli pozitīvi skaitļi  $n$  un  $k$ , kur  $k \geq n$  un  $k - n$  ir pāra skaitlis. Apskatīsim  $2n$  spuldzes, kurām piešķirti numuri  $1, 2, \dots, 2n$ . Katra spuldze var atrasties jebkurā no diviem stāvokļiem: ieslēgta vai izslēgta. Sākotnēji visas spuldzes ir izslēgtas. Apskatīsim *soļu* virknes: katrā solī tieši viena spuldze maina savu stāvokli (no ieslēgtas kļūst par izslēgtu vai arī no izslēgtas – par ieslēgtu).

Ar  $N$  apzīmējam tādu virkņu skaitu, kurām piemīt īpašība: virkne sastāv no  $k$  soļiem, pēc kuru izpildes visas spuldzes ar numuriem no  $1$  līdz  $n$  ieskaitot ir ieslēgtas, bet visas spuldzes ar numuriem no  $n + 1$  līdz  $2n$  ieskaitot ir izslēgtas.

Ar  $M$  apzīmējam tādu virkņu skaitu, kurām piemīt īpašība: virkne sastāv no  $k$  soļiem, pēc kuru izpildes visas spuldzes ar numuriem no  $1$  līdz  $n$  ieskaitot ir ieslēgtas, bet visas spuldzes ar numuriem no  $n + 1$  līdz  $2n$  ieskaitot ir izslēgtas, turklāt šo soļu izpildes gaitā neviena spuldze ar numuru no  $n + 1$  līdz  $2n$  ieskaitot ne reizi nebija ieslēgta.

Aprēķiniet attiecību  $N/M$ .

**6. uzdevums** Pieņemsim, ka  $ABCD$  ir izliekts četrstūris un  $BA \neq BC$ . Ar  $\omega_1$  un  $\omega_2$  apzīmēsim attiecīgi trijstūros  $ABC$  and  $ADC$  ievilktais riņķa līnijas. Pieņemsim, ka eksistē tāda riņķa līnija  $\omega$ , kas pieskaras staram  $BA$  aiz punkta  $A$  un staram  $BC$  aiz punkta  $C$ , kā arī taisnēm  $AD$  un  $CD$ . Pierādiet, ka riņķa līniju  $\omega_1$  un  $\omega_2$  kopējās ārējās pieskares krustojas punktā, kas pieder riņķa līnijai  $\omega$ .