Language: **Arabic (Moroccan)** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Wednesday, July 16, 2008

التمرين الأول

ليكن $\mathbf{ABC}$ مثلثا زواياه حادة و $\mathbf{H}$ مركز تعامده . الدائرة التي تمر من النقطة $\mathbf{H}$ و مركزها هو منتصف $[\mathbf{BC}]$ تقطع المستقيم $(\mathbf{BC})$ في $\mathbf{A_1}$ و $\mathbf{A_2}$ و الدائرة التي تمر من النقطة $\mathbf{H}$ و مركزها هو منتصف $[\mathbf{AC}]$ تقطع المستقيم $(\mathbf{AC})$ في $\mathbf{B_1}$ و $\mathbf{B_2}$ و الدائرة التي تمر من النقطة $\mathbf{H}$ و مركزها هو منتصف $[\mathbf{AB}]$ تقطع المستقيم $(\mathbf{AB})$ في $\mathbf{C_1}$ و $\mathbf{C_2}$.

بين أن النقط $\mathbf{A_1}$ و $\mathbf{A_2}$ و $\mathbf{B_1}$ و $\mathbf{B_2}$ و $\mathbf{C_1}$ و $\mathbf{C_2}$ متداورة أي أنها تنتمي لنفس الدائرة.

التمرين الثاني

1) بين أن : $\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$ لكل x و y و z من $\mathbb{R}$ بحيث $x\neq 1$ و$y\neq 1$ و $z\neq 1$ و $xyz=1$.

2) بين أن حالة التساوي محققة بالنسبة لما لانهاية من الأعداد الجذرية x و y و z بحيث $x\neq 1$ و $y\neq 1$ و $z\neq 1$ و $xyz=1$.

التمرين الثالث

بين أنه توجد مالانهاية من الأعداد الصحيحة الموجبة قطعا n بحيث n^2+1 يقبل قاسما أوليا أكبر قطعا من $2n+\sqrt{2n}$.

Language : ARABIC MOROCCAN

مدة الإنجاز : أربع ساعات و نصف.

تمنح سبع نقط عن كل تمرين.

Language: **Arabic (Moroccan)** Day: **2**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Thursday, July 17, 2008

التمرين الرابع

حدد جميع الدوال f من $]0,+\infty[$ نحو $]0,+\infty[$ التي تحقق $\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$

لكل w و x و y و z من $]0,+\infty[$ بحيث $wx=yz$.

التمرين الخامس

ليكن n و k عددين صحيحين موجبين قطعا بحيث $k\geq n$ و $k-n$ زوجي .

لدينا $2n$ مصباحا مرقمة من 1 إلى $2n$. كل مصباح يكون إما مضاء **(ON)** أو مطفئا **(OFF)**. في البداية نفترض أن جميع المصابيح في وضعية **(OFF)**.

نعتبر سلسلة من k خطوة : في كل خطوة نختار أحد المصابيح بحيث إذا كان مطفئا **(OFF)** نجعله مضاء **(ON)** أما إذا كان مضاء **(ON)** فنجعله مطفئا **(OFF)**.

ليكن N عدد السلسلات من k خطوة التي تنتهي بالوضعية التالية : المصابيح المرقمة من 1 إلى n مضاءة **(ON)** و المصابيح المرقمة من $n+1$ إلى $2n$ مطفئة **(OFF)**.

ليكن M عدد السلسلات من k خطوة التي تنتهي إلى **نفس الوضعية** بدون لمس المصابيح المرقمة من $n+1$ إلى $2n$ جميعها أي بتركها مطفئة **(OFF)** منذ البداية .

حدد الخارج $\frac{N}{M}$.

التمرين السادس

$ABCD$ رباعي محدب بحيث $AB\neq BC$. نرمز ب ω_1 و ω_2 للدائرتين المحاطتين بالمثلثين **ABC** و **ADC** على التوالي .

نفترض أنه توجد دائرة ω مماسة لنصف المستقيم $[BA)$ بعد النقطة A (أي أن نقطة التماس لا تنتمي للقطعة $[BA]$) و مماسة لنصف المستقيم $[CA)$ بعد النقطة C و مماسة كذلك للمستقيمين **(AD)** و **(CD)**.

بين أن المماسان الخارجيان المشتركان للدائرتين ω_1 و ω_2 يتقاطعان في نقطة تنتمي للدائرة ω .

Language : ARABIC MOROCCAN

مدة الإنجاز : أربع ساعات و نصف.

تمنح سبع نقط عن كل تمرين.