Language: **Arabic** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Wednesday, July 16, 200

الأربعاء 16 – 7 – 2008

السؤال الأول:

ABC مثلث حاد الزوايا ، **H** نقطة تلاقي ارتفاعاته.

نأخذ دائرة مركزها منتصف الضلع **BC** و تمر من النقطة **H** فتقطع المستقيم **BC** في نقطتين A_1 و A_2 ، بالمثل نأخذ دائرة مركزها منتصف الضلع **CA** و تمر من النقطة **H** فتقطع المستقيم **CA** في نقطتين B_1 و B_2 ، بالمثل أيضا نأخذ دائرة مركزها منتصف الضلع **AB** و تمر من النقطة **H** فتقطع المستقيم **AB** في نقطتين C_1 و C_2.

بين أن النقط A_1 ، A_2 ، B_1 ، B_2 ، C_1 ، C_2 تقع علي دائرة واحدة.

السؤال الثاني:

a) لكل x ، y ، z أعداد حقيقية مختلفة عن العدد 1 بحيث $xyz = 1$

برهن أن :

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

b) برهن أن المتباينة المذكورة أعلاه تصبح مساواة لعدد غير منته من الثلاثيات النسبية x ، y ، z

حيث x ، y ، z مختلفة عن العدد 1 وَ $xyz = 1$

السؤال الثالث:

برهن أنه يوجد عدد غير منته من الأعداد الصحيحة الموجبة n بحيث: $n^2 + 1$ له قاسما أوليا أكبر من $2n + \sqrt{2n}$.

Language : Arabic

مدة الاختبار أربع ساعات و نصف.

لكل سؤال سبع درجات.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Thursday, July 17, 2008 الخميس 17 – 7 - 2008

السؤال الرابع:

أوجد جميع الدوال $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ (حيث f دالة من الأعداد الحقيقية الموجبة إلي الأعداد الحقيقية الموجبة)

التي تحقق $\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$ لكل الأعداد الحقيقية الموجبة w,x,y,z حيث $wx=yz$

السؤال الخامس:

ليكن n و k عددين صحيحين موجبين حيث $k\geq n$ و $k-n$ عدد زوجي.

لدينا 2n مصباحا مرقمة 1 ، 2 ، ... ، 2n. كل مصباح من هذه المصابيح يمكن أن يكون في وضع ON (مضاء) أو وضع OFF (مطفئ). في البداية جميع المصابيح في وضع OFF.

الخطوة: هي تغيير وضع المصباح (من OFF إلى ON أو من ON إلى OFF)

السلسلة : هي عدد من الخطوات المتتالية.

ليكن N عدد السلاسل المكونة من k خطوة و التي تنتهي إلى الحالة التي تكون فيها المصابيح من 1 إلى n جميعها في الوضع ON و المصابيح من $n+1$ إلى 2n جميعها في الوضع OFF.

ليكن M عدد السلاسل المكونة من k خطوة و التي تنتهي إلى الحالة التي تكون فيها المصابيح من 1 إلى n جميعها في الوضع ON و المصابيح من $n+1$ إلى 2n جميعها في الوضع OFF بحيث أن المصابيح من $n+1$ إلى 2n لم تمس (لم يغير وضعها البدائي)

أوجد النسبة $\frac{N}{M}$.

السؤال السادس:

ليكن ABCD شكل رباعي (محدب) حيث $AB\neq BC$. نرمز بـــ M_1 و M_2 للدائرتين المرسومتين داخل المثلثين ABC و ADC والمماستين لهما علي التوالي.

نفترض أنه توجد دائرة M تمس امتداد ضلعي الزاوية ABC كما أنها تمس امتداد الضلعين AD و CD.

أثبت أن عامة المماسات الخارجية للدائرتين M_1 و M_2 تتقاطع في نقطة تنتمي للدائرة M .

مدة الاختبار أربع ساعات و نصف.

لكل سؤال سبع درجات.

Language : Arabic