

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

E Mërkurë, 16 Korrik, 2008

Problem 1. Le të jetë H pikëprerja e lartësive të trekëndëshit këndngushtë ABC . Rrethi me qendër mesin e brinjës BC , i cili kalon nga pika H , pret drejtëzën BC në pikat A_1 dhe A_2 . Ngjashëm, rrethi me qendër mesin e brinjës CA , i cili kalon nga pika H , pret drejtëzën CA në pikat B_1 dhe B_2 dhe rrethi me qendër mesin e brinjës AB , i cili kalon nga pika H , pret drejtëzën AB në pikat C_1 dhe C_2 . Tregoni që $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ ndodhen mbi një rreth.

Problem 2. (a) Provoni mosbarazimin

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

për të gjithë numrat realë x, y, z , të ndryshëm nga 1 dhe që plotësojnë kushtin $xyz = 1$.

(b) Tregoni që ka një pafundësi treshesh numrash racionalë x, y, z , të ndryshëm nga 1 dhe që plotësojnë kushtin $xyz = 1$, për të cilët mosbarazimi i mësipërm kthehet në barazim.

Problem 3. Provoni që ekziston një pafundësi numrash të plotë pozitivë n të tillë që $n^2 + 1$ ka një pjesëtues të thjeshtë i cili është më i madh se $2n + \sqrt{2n}$.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

E Enjte, 17 Korrik, 2008

Problem 4. Gjeni të gjitha funksionet $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (pra, f është i përcaktuar në bashkësinë e numrave realë pozitivë dhe merr vlera në bashkësinë e numrave realë pozitivë) të tillë që

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

për të gjithë numrat realë pozitivë w, x, y, z , që plotësojnë kushtin $wx = yz$.

Problem 5. Le të jenë n dhe k numra të plotë pozitivë ku $k \geq n$ and $k - n$ është një numër çift. Jepen $2n$ llampa, të etiketuara me numrat $1, 2, \dots, 2n$, çdonjëra prej të cilave mund të jetë në njërin prej dy gjendjeve, *e ndezur* ose *e shuar*. Fillimisht, të gjitha llambat janë të shuara. Marrim në shqyrtim vargjet e *operacioneve* ku *operacion* do të quajmë ndryshimin e gjendjes së vetëm një llampe (nga e ndezur shuhet ose nga e shuar ndizet).

Le të jetë N numri i vargjeve të përbërë nga k operacione në fund të të cilave të gjitha llambat nga 1 deri n janë të ndezura dhe të gjitha llambat nga $n + 1$ deri $2n$ janë të shuara.

Le të jetë M numri i vargjeve të përbërë nga k operacione në fund të të cilave të gjitha llambat nga 1 deri n janë të ndezura, të gjitha llambat nga $n + 1$ deri $2n$ janë të shuara, por ku asnjëra prej llampave nga $n + 1$ deri $2n$ nuk është ndezur kurrë.

Përcaktoni raportin N/M .

Problem 6. Le të jetë $ABCD$ një katërkëndësh konveks me $BA \neq BC$. Le të jenë ω_1 dhe ω_2 rathët brendashkruar, përkatësisht trekëndëshave ABC dhe ADC . Supozojmë që ekziston një rreth ω tangjent me zgjatimin e BA përtej A dhe me zgjatimin e BC përtej C dhe që është gjithashtu tangjent me drejtëzat AD and CD . Provoni që tangjentet e përbashkëta të jashtme të rathëve ω_1 dhe ω_2 priten në një pike të rrethit ω .